Całki oznaczone i niewłaściwe - zadania

1. Obliczyć całki:

a) $\int_0^1 \left(4x^3+5x-1\right)dx$, b) $\int_{-2}^{2}(x-1)^3\,dx$, c) $\int_1^2 \sqrt[4]{x^3}\,dx$, d) $\int_3^5 \frac{x}{x^2-4}dx$,

e) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$, f) $\int_0^{\pi/4}\sin 4x\,dx$, g) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$, h) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}x\,dx$,

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$, j) $\int_1^e x^2\ln x\,dx$, k) $\int_0^1 x\mathrm{arctg}x\,dx$, l) $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^2+2x+1}$,

m) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx$, n) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x}$, o) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 x\,dx$ p) $\int_0^{\pi}\sin^2 x\cos^2 x\,dx$

r) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}dx$.

2. Obliczyć pola obszarów ograniczonych liniami:

a) $y=-x^2+3x,\ y=0$, b) $y=x^2,\ 2x-y+3=0$, c) $y=x^3,\ y=4x$, d) $y=2x-x^2,\ x+y=0$,

e) $y=x^2-x-6,\quad y=-x^2+5x+14$, f) $y=\frac{4}{x},\ x+y=5$, g) $y=x^2,\ y^2=x$,

h) $y=\ln x,\ y=1,\ x=e^3$, i) $y^2=x,\ y=x-2$, j) $y=\frac{3}{x}$, $y=x+2,\ y=1$.

3*. Obliczyć długości łuku krzywej o równaniu $f(x)=\ln x$ dla $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

4. Obliczyć objętości brył powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

a) $y^2=2px$, $0\le x\le 4$, b) $y=\mathrm{tg}\,x$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$, c) $y=\ln x,\ 1\le x\le e^2$.

5. Obliczyć pola powierzchni powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

a) $y=\sqrt{x+2}$ dla $1\le x\le 2$, b) $y=e^x$ dla $0\le x\le\ln 3$.

6. Obliczyć pole obszaru płaskiego ograniczonego liniami $(a,b>0)$:

a) $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$, $t\in\left\langle 0,2\pi\right)$, b) $x(t)=a\cos t,\ y(t)=b\sin t,\ t\in\left\langle 0,2\pi\right)$,

c) $r(\varphi)=a$, $\varphi\in\left\langle 0,2\pi\right)$, d) $r(\varphi)=ae^{m\varphi},\quad \varphi\in\left\langle 0,2\pi\right)$.

7. Obliczyć długość łuku krzywych o równaniach:

a) $x(t)=a(\cos t+t\sin t)$, $y(t)=a(\sin t-t\cos t)$, $t\in\left\langle 0,\pi\right\rangle$,

b) $x(t)=a\cos t,\ y(t)=a\sin t,\ t\in\left\langle 0,2\pi\right)$,

c) $r(\varphi)=a\varphi,\quad \varphi\in\left\langle 0,2\pi\right)$,

d)* $r(\varphi)=a(1+\cos\varphi),\quad \varphi\in\left\langle 0,\pi\right\rangle$.

8. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

a) $x(t)=a\cos^3 t,\ y(t)=a\sin^3 t,\ t\in\langle 0,\pi\rangle$, b) $x(t)=a\cos t,\ y(t)=a\sin t,\ t\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

9. Obliczyć całki niewłaściwe (o ile istnieją):

a) $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$, b) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$, c) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$, d) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}$,

e) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}dx$, f) $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+9}$, g) $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2+x+1}$, h) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$,

i) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$, j) $\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, k) $\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}$, l) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

m) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}dx$, n) $\int_0^1\frac{x}{1-x}dx$, o) $\int_1^2\frac{dx}{(1-x)^2}$.

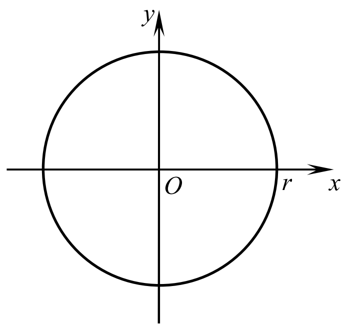
Zastosowania geometryczne całek oznaczonych - wzory

	Krzywa dana równaniem: $y=f(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$	Krzywa dana równaniami: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in\langle\alpha,\beta\rangle$	Krzywa dana równaniem: $r=f(\varphi)$, $\varphi\in\langle\alpha,\beta\rangle$
Pole obszaru	$P=\int_a^b f(x)dx$ (dla $f(x)\geq 0$ dla każdego $x\in\langle a,b\rangle$)	• $x(t)$ - jest rosnąca $P=\int_\alpha^\beta \lvert y(t)\rvert x'(t)\,dt$ • $x(t)$ - jest malejąca $P=-\int_\alpha^\beta \lvert y(t)\rvert x'(t)\,dt$	$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r(\varphi)]^2\,d\varphi$
Długość łuku	$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$	$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\varphi)]^2+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$
Objętość bryły obrotowej	$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$	• $x(t)$ - jest rosnąca $V=\pi\int_\alpha^\beta[y(t)]^2x'(t)\,dt$ • $x(t)$ - jest malejąca $V=-\pi\int_\alpha^\beta[y(t)]^2x'(t)\,dt$	
Pole powierzchni bryły obrotowej	$S=2\pi\int_a^b\lvert f(x)\rvert\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$S=2\pi\int_\alpha^\beta\lvert y(t)\rvert\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$	

Wybrane krzywe określone równaniami parametrycznymi

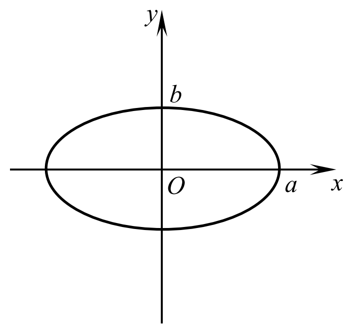
Okrąg

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \quad t \in \langle 0\,,\, 2\pi)$$



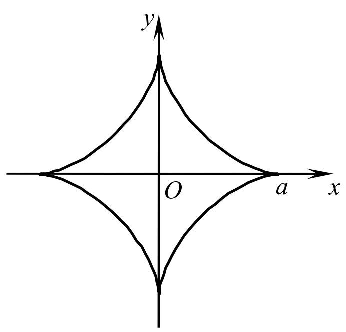
Elipsa

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad t \in \langle 0\,,\, 2\pi).$$



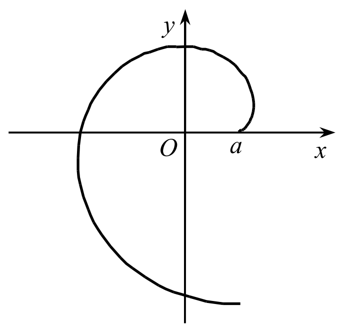
Asteroida

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in \langle 0\,,\, 2\pi).$$



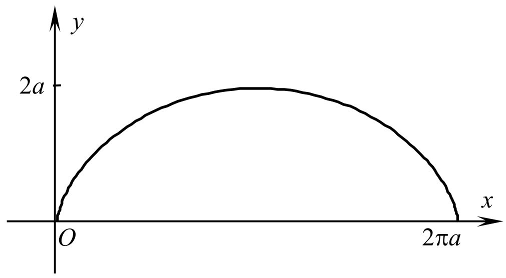
Ewolwenta koła

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad t \in \langle 0\,,\, 2\pi).$$



Cykloida

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in \langle 0\,,\, 2\pi)$$

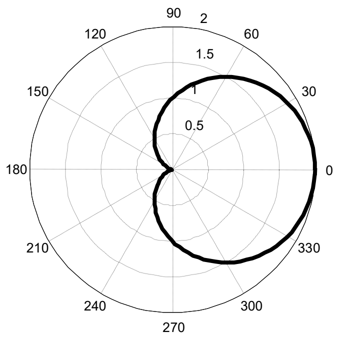


Wybrane krzywe w układzie biegunowym

Kardioida

$r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0,\, 2\pi)$.

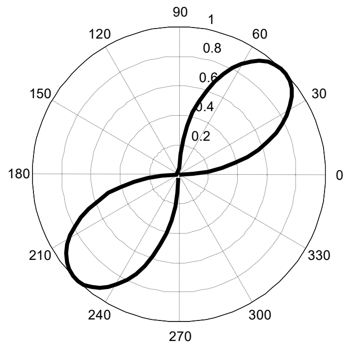
Wykres dla $a = 1$:



Rozeta dwulistna

$r = a \sin 2\varphi$

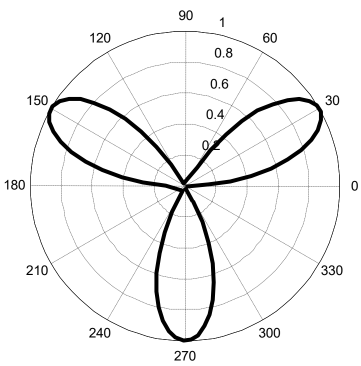
Wykres dla $a = 1$:



Rozeta trójlistna

$r = a \sin 3\varphi$.

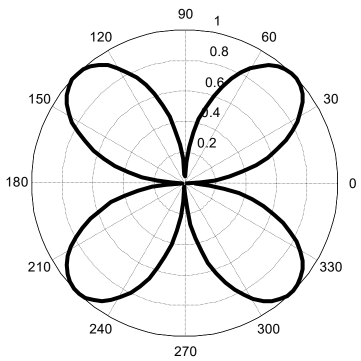
Wykres dla $a = 1$:



Rozeta czterolistna

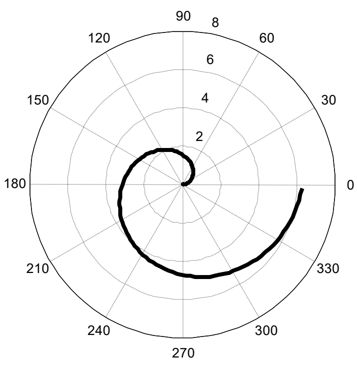
$r = a\left|\sin 2\varphi\right|$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Wykres dla $a = 1$:



Spirala Archimedesa

$r = \varphi$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.



Spirala wykładnicza

$r = a\mathrm{e}^{m\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Wykres dla $a = 2$ i $m = 0{,}25$: